2020年度岩手大学一般入試（前期日程）数学（理工学部）解答例

$\boxed{1}$ 〔解答例〕

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log_6(\sqrt{9x^2+x}-3x)$

$$=\lim_{x\to\infty}\log_6\frac{(\sqrt{9x^2+x}-3x)(\sqrt{9x^2+x}+3x)}{\sqrt{9x^2+x}+3x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\log_6\frac{(9x^2+x)-(3x)^2}{x\sqrt{9+1/x}+3x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\log_6\frac{1}{\sqrt{9+1/x}+3}$$

$$=\log_6\frac{1}{6}$$

$$=-1$$

(2) 直線 $y=mx$ と x 軸のなす角を α, 直線 $y=\dfrac{1}{m}x$ と x 軸 のなす角を β とおくと、$\theta=\alpha-\beta$ であり、加法定理により

$$\tan\theta=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\frac{m-\frac{1}{m}}{1+m\cdot\frac{1}{m}}=\frac{m^2-1}{2m}.$$

一方、

$$\cos^2\theta=\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{1+\left(\frac{m^2-1}{2m}\right)^2}=\left(\frac{2m}{1+m^2}\right)^2$$

であるから、$\cos\theta=\dfrac{2m}{1+m^2}$ である。

(3) 両辺の常用対数をとれば、

$$\log_{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{8}} < \log_{10}\left(\frac{1}{2700}\right)$$

$$\frac{n}{8}(-\log_{10}3) < -\log_{10}27 - \log_{10}100 = -3\log_{10}3 - 2\log_{10}10$$

$$n > 24 + \frac{16}{\log_{10}3}$$

$$n > 24 + 33.54\cdots = 57.54\cdots$$

したがって、不等式を満たす最小の自然数は、

$$n = 58$$

(4) 求める確率は、「A から赤球 2 個、白球 0 個を取り出す確率」と「A から赤球 1 個、白球 1 個を取り出す確率」の和である。よって、

$$\frac{{}_2C_2 \cdot {}_4C_0}{{}_6C_2} + \frac{{}_2C_1 \cdot {}_4C_1}{{}_6C_2} = \frac{2}{6\cdot 5}(1\cdot 1 + 2\cdot 4) = \frac{3}{5}$$

2 〔解答例〕

(1) 楕円の方程式 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ の両辺を x で微分すると、

$$\frac{2x}{9}+\frac{2y}{4}\frac{dy}{dx}=0$$

$y\neq0$ のとき、

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{9}\frac{4}{2y}=-\frac{4x}{9y}$$

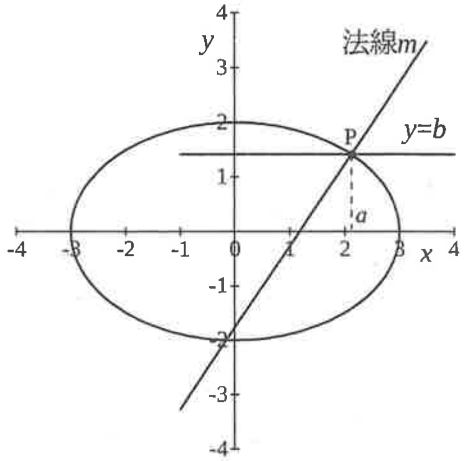
よって、点 $\mathrm{P}(a,b)$ における接線 l の傾きは、$-\dfrac{4a}{9b}$

(2) 接線 l の傾きが $-\dfrac{4a}{9b}$ であるので、法線 m の傾きは $\dfrac{9b}{4a}$ となる。

したがって、点 P における法線の方程式は、

$$y-b=\frac{9b}{4a}(x-a)\quad\therefore y=\frac{9b}{4a}x-\frac{9b}{4}+b=\frac{9b}{4a}x-\frac{5b}{4}$$

(3) 三角形の面積 S は、



$$S=\frac{1}{2}a\left(b+\frac{5}{4}b\right)=\frac{1}{2}a\times\frac{9}{4}b=\frac{9}{8}ab\cdots①$$

点 P は楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上にあるので、

$$\frac{a^2}{9}+\frac{b^2}{4}=1$$

$$b^2=4\left(1-\frac{a^2}{9}\right)=\frac{4}{9}(9-a^2)$$

$$\therefore b=\frac{2}{3}\sqrt{9-a^2}\cdots②$$

式②を式①に代入すると、

$$S(a)=\frac{9}{8}a\times\frac{2}{3}\sqrt{9-a^2}=\frac{3}{4}a\sqrt{9-a^2}\cdots③$$

S を微分すると、

$$S'(a)=\frac{3}{4}\sqrt{9-a^2}+\frac{3}{4}a\times\frac{1}{2}\frac{-2a}{\sqrt{9-a^2}}=\frac{3}{4}\left(\sqrt{9-a^2}-\frac{a^2}{\sqrt{9-a^2}}\right)$$

$$=\frac{3}{4}\left(\frac{9-a^2-a^2}{\sqrt{9-a^2}}\right)=\frac{3}{4}\left(\frac{9-2a^2}{\sqrt{9-a^2}}\right)=\frac{3}{4}\frac{(3+\sqrt{2}a)(3-\sqrt{2}a)}{\sqrt{9-a^2}}$$

増減表

a	0		$\frac{3}{\sqrt{2}}$		3
$S'(a)$	／	+	0	−	／
$S(a)$	／	↗	極大	↘	／

$a=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ で面積 $S(a)$ は最大となる。このとき、式②より、

$$b=\frac{2}{3}\sqrt{9-a^2}=\frac{2}{3}\sqrt{9-\frac{9}{2}}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{9}{2}}=\sqrt{2}$$

式①より、

$$S=\frac{9}{8}ab=\frac{9}{8}\times\frac{3}{\sqrt{2}}\times\sqrt{2}=\frac{27}{8}$$

よって、面積 S が最大となる点Pは $\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}},\sqrt{2}\right)$、面積 S は $\dfrac{27}{8}$

設問(3)の別解

三角形の面積 S は、

$$S=\frac{1}{2}a\left(b+\frac{5}{4}b\right)=\frac{1}{2}a\times\frac{9}{4}b=\frac{9}{8}ab\cdots①$$

楕円上の点Pの座標を　$x=3\cos\theta$　、　$y=2\sin\theta$　と表すことができるので、面積 S は、

$$S=\frac{9}{8}(3\cos\theta)(2\sin\theta)=\frac{27}{8}\sin 2\theta$$

$\sin 2\theta=1$ のとき、面積 S は最大となり、

$$\sin 2\theta=1 \quad \therefore \theta=\frac{\pi}{4}$$

$$x=3\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$y=2\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

よって、面積 S が最大となる点Pは $\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}},\sqrt{2}\right)$、面積 S は $\dfrac{27}{8}$

$\boxed{3}$

解答例

(1) $b_1 = 4$、$b_2 = 6$、$b_3 = 8$ である。数列 $\{b_n\}$ は等差数列であるから、その初項は 4、公差は 2 である。よって、$b_n = 4 + 2(n-1) = 2n + 2$。

(2) 設問 (1) より、$n \geqq 1$ のとき、

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k+2) \\ &= 2 + 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2} + 2(n-1) = n^2 + n \end{aligned}$$

これは $n = 1$ に対しても成り立つ。よって、これが解である。

(3)

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n}(k^2+k) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \end{aligned}$$

(4)

$$c_n = \frac{n+1}{S_n} = \frac{3}{n(n+2)} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$$

よって、$n \geqq 3$ のとき、

$$\begin{aligned} &T_n \\ &= c_1 + c_2 + \cdots + c_n \\ &= \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) \\ &+ \cdots + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= \frac{3}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= \frac{3n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

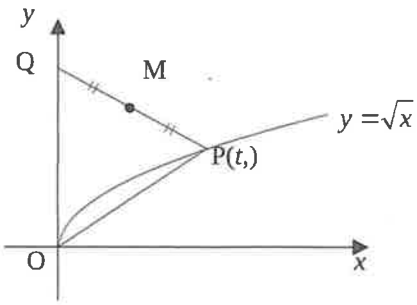
この表式は、$n = 1$ のときの解、$T_1 = 1$、$n = 2$ のときの解、$T_2 = \dfrac{33}{24}$ に対しても成り立つ。よって、これが解である。

4〔解答例〕

(1) 点Pの座標は$\left(t, \sqrt{t}\right)$であり、線分OPの長さは、

$$\mathrm{OP}=\sqrt{t^2+(\sqrt{t})^2}=\sqrt{t^2+t}$$

したがって、点Qの座標は、$\left(0, \sqrt{t^2+t}\right)$



(2) 中点Mの座標を(x, y)とすると

$$x=\frac{t}{2}、\ y=\frac{\sqrt{t^2+t}+\sqrt{t}}{2}$$

$t=2x$をyの式に代入してtを消去すると

$$y=\frac{\sqrt{4x^2+2x}+\sqrt{2x}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{2x}\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}{2}$$

(3) $\mathrm{OP}^2=\mathrm{PQ}^2$より

$$t^2+t=t^2+\left(\sqrt{t^2+t}-\sqrt{t}\right)^2$$
$$t^2+t=t^2+t^2+t-2\sqrt{t}\sqrt{t^2+t}+t$$
$$t+1=2\sqrt{t+1}$$

両辺を二乗して

$$(t+1)^2=4(t+1)$$
$$t^2-2t-3=0$$
$$(t+1)(t-3)=0$$

したがって、$t=3$のときの点Pの座標は $\left(3, \sqrt{3}\right)$

設問(3) の別解

△POQは正三角形となるため、$\angle\mathrm{POQ}=\theta$ とすると

$$\tan\theta=\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{t}{\sqrt{t}}=\sqrt{t}=\sqrt{3}$$

より、$t=3$ のときの点Pの座標は $\left(3, \sqrt{3}\right)$

$\boxed{5}$ 〔解答例〕

(1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　また、$y=f(x)=b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$

(2) 求める積分は、$b\displaystyle\int_0^{a/2}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx$　である。

$x=a\sin\theta$ とおくと、$dx=a\cos\theta\ d\theta$ であるから

$$b\int_0^{a/2}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx=ab\int_0^{\pi/6}\sqrt{1-\sin^2\theta}\ \cos\theta\,d\theta=ab\int_0^{\pi/6}\cos^2\theta\,d\theta$$
$$=\frac{ab}{2}\int_0^{\pi/6}(1+\cos 2\theta)\,d\theta=\frac{ab}{2}\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/6}=\frac{ab}{2}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

(3) 求める体積は、楕円の回転体の体積と線分を回転してできる円錐の体積との差である。したがって、

$$\pi\int_0^a\{f(x)\}^2\,dx-\frac{1}{3}\pi b^2a=\pi b^2\int_0^a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx-\frac{1}{3}\pi ab^2$$
$$=\pi b^2\left[x-\frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a-\frac{1}{3}\pi ab^2=\frac{2}{3}\pi ab^2-\frac{1}{3}\pi ab^2=\frac{1}{3}\pi ab^2$$