2020 年度　岩手大学　一般入試　前期日程
数　学（教育学部）解　答　例

1

(1) $y = 2x^2 + 3x - 2 = 2\left(x + \dfrac{3}{4}\right)^2 - \dfrac{25}{8}$ であるから，この 2 次関数のグラフは直線 $x = -\frac{3}{4}$ を対称軸とする下に凸な放物線であり，従って x の値が $-\frac{3}{4}$ に近いほど関数の値は小さくなり，x の値が $-\frac{3}{4}$ から離れるほど関数の値は大きくなる．

$2 \leqq |x| \leqq 3$ を満たす x の中で値が $-\frac{3}{4}$ に一番近いのは $x = -2$ のときで，一番遠いのは $x = 3$ のときであるから，求める最小値は $2 \cdot (-2)^2 + 3 \cdot (-2) - 2 = 0$，求める最大値は $2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 - 2 = 25$ である．

(2) $\cos\theta = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \dfrac{3 \cdot 2 + 7 \cdot (-5)}{\sqrt{3^2 + 7^2}\sqrt{2^2 + (-5)^2}} = \dfrac{-29}{\sqrt{58}\sqrt{29}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$
ここで，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ であるから，求める角は $\theta = 135^\circ$．

(3) $155 = n^2 - m^2 = (n-m)(n+m)$．ここで，$m, n$ は自然数だから，$(n-m)$ と $(n+m)$ は 155 の正の約数であり，また，$n - m < n + m$ であるから，$(n-m)^2 < (n-m)(n+m) = 155$，よって $(n-m) < \sqrt{155} < 13$．一方，$155 = 5 \cdot 31$ で，5 と 31 は素数であるから，155 の正の約数で 13 より小さいものは 1 と 5 だけである．以上より，

$$\begin{cases} n - m = 1, \\ n + m = 155, \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} n - m = 5, \\ n + m = 31. \end{cases}$$

前者を解くと，$m = 77, n = 78$，後者を解くと，$m = 13, n = 18$．

2

(1) 100 円硬貨 5 枚，50 円硬貨 3 枚を投げ，表が出た硬貨の合計金額が 400 円ということは,「100 円硬貨が 4 枚表，他の 4 枚は裏」となるか,「100 円硬貨 3 枚と 50 円硬貨 2 枚が表，他の 3 枚は裏」となるかのいずれかの場合であり，前者の確率は ${}_5C_4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8$，後者の確率は ${}_5C_3 \cdot {}_3C_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8$ であるから，求める確率は,

$${}_5C_4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 + {}_5C_3 \cdot {}_3C_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = (5 + 10 \cdot 3)\frac{1}{2^8} = \frac{35}{256}.$$

(2) 投げた 8 枚の硬貨がすべて表になると，表が出た硬貨の合計金額は 650 円で，そうなる確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^8$. 次に，表が出た硬貨の合計金額が 600 円になる場合は，50 円硬貨が 1 枚だけ裏になる場合で，そうなる確率は ${}_3C_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8$. 従って，表が出た硬貨の合計金額が 600 円以上となる確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^8 + {}_3C_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = (1 + 3)\frac{1}{2^8} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}.$$

「表が出た硬貨の合計金額が 600 円未満」という事象は,「表が出た硬貨の合計金額が 600 円以上」という事象の余事象だから，求める確率は,

$$1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}.$$

(3) 表が出た硬貨の合計金額が 400 円となる確率を p_1 とすると，(1) で求めたように，$p_1 = \frac{35}{256}$. 一方,「表が出た硬貨の合計金額が 400 円」かつ「表が出た 50 円硬貨が少なくとも 1 枚ある」ということは,「100 円硬貨 3 枚と 50 円硬貨 2 枚が表，他の 3 枚は裏」ということであるから，そうなる確率を p_2 とすると，(1) で計算した通り,

$$p_2 = {}_5C_3 \cdot {}_3C_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{5 \cdot 3}{2^7} = \frac{15}{128}.$$

よって，求める条件付き確率は,

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{15}{128} \cdot \frac{256}{35} = \frac{6}{7}.$$

3

(1) 与えられた漸化式に $n=1, 2, 3$ を順に代入して，

$$a_2=\frac{4a_1-28}{3}=\frac{4\cdot 31-28}{3}=\frac{96}{3}=32,$$
$$a_3=\frac{5a_2-28}{4}=\frac{5\cdot 32-28}{4}=\frac{132}{4}=33,$$
$$a_4=\frac{6a_3-28}{5}=\frac{6\cdot 33-28}{5}=\frac{170}{5}=34.$$

(2) $a_1=31, a_2=32, a_3=33, a_4=34$ であることから，すべての自然数 n に対し，

$$a_n=n+30 \quad \cdots ①$$

であると推測できるので，これを数学的帰納法で証明する．

[I] まず，$a_1=31=1+30$ であるから，① は $n=1$ のとき成立する．

[II] 次に，k を自然数とし，① が $n=k$ のときに成立すると仮定すると，$a_k=k+30$ であり，漸化式により，

$$\begin{aligned} a_{k+1}&=\frac{(k+3)a_k-28}{k+2}=\frac{(k+3)(k+30)-28}{k+2}\\ &=\frac{k^2+33k+62}{k+2}=\frac{(k+2)(k+31)}{k+2}=k+31=(k+1)+30 \end{aligned}$$

となり，① は $n=k+1$ に対しても成立する．

[I], [II] により，① がすべての自然数 n に対して成立することが証明された．

(3) 数列 $\{a_n\}$ は等差数列で，$a_1=31$，$a_{40}=40+30=70$ であるから，等差数列の和の公式により，

$$\sum_{n=1}^{40}a_n=\frac{1}{2}\cdot 40(a_1+a_{40})=20(31+70)=20\cdot 101=2020.$$

4

(1) $y=x^3-x$ を x で微分すると，$y'=3x^2-1$.

x 座標が a の点における曲線 C の接線が ℓ だから，ℓ の傾きは $(3a^2-1)$ である．さらに，ℓ は点 (a, a^3-a) を通るから，求める ℓ の方程式は，

$y=(3a^2-1)(x-a)+a^3-a$，整理して，$y=(3a^2-1)x-2a^3$.

(2) 求める交点の x 座標は，

$$x^3-x=(3a^2-1)x-2a^3 \quad \text{かつ} \quad x \neq a$$

を満たす x の値である．その 3 次方程式は $x=a$ を解にもつことに注意して，整理，因数分解すると，$0=x^3-3a^2x+2a^3=(x-a)^2(x+2a)$，これを解けば $x=a, -2a$ を得る．

a は正だから $-2a \neq a$ であり，求める交点の x 座標は $-2a$ である．

(3) (2) の結果から，曲線 C と接線 ℓ は $x=a$ において接し，$x=-2a$ において交わることがわかった．a は正だから，$-2a<a$ であり，$-2a<x<a$ の範囲の x に対しては，$(x^3-x)-((3a^2-1)x-2a^3)=(x-a)^2(x+2a)>0$ である．従って，曲線 C と接線 ℓ で囲まれた図形の面積は，

$$\begin{aligned}
&\int_{-2a}^{a}\{(x^3-x)-((3a^2-1)x-2a^3)\}\,dx \\
&\quad=\int_{-2a}^{a}(x^3-3a^2x+2a^3)\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}a^2x^2+2a^3x\right]_{-2a}^{a} \\
&\quad=\frac{1}{4}(a^4-(-2a)^4)-\frac{3}{2}a^2(a^2-(-2a)^2)+2a^3(a-(-2a)) \\
&\quad=a^4\left(-\frac{15}{4}+\frac{9}{2}+6\right)=\frac{27}{4}a^4.
\end{aligned}$$

この面積が 108 であるから，$\dfrac{27}{4}a^4=108$，ゆえに $a^4=108\cdot\dfrac{4}{27}=16$．これと a が正であることから，$a=2$.

5

(1) $f(x)=x\sin x$ とおくと，$f'(x)=x\cos x+\sin x$ だから，直線 ℓ の傾きは
$f'\left(\frac{3}{2}\pi\right)=\frac{3}{2}\pi\cos\frac{3}{2}\pi+\sin\frac{3}{2}\pi=-1$.
また，$f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=\frac{3}{2}\pi\sin\frac{3}{2}\pi=-\frac{3}{2}\pi$ だから，ℓ は点 $\left(\frac{3}{2}\pi,\ -\frac{3}{2}\pi\right)$ を通る.
従って ℓ の方程式は，$y=-\left(x-\frac{3}{2}\pi\right)-\frac{3}{2}\pi$，即ち，$y=-x$.

(2) 曲線 C と接線 ℓ は，点 $\left(\frac{3}{2}\pi,\ -\frac{3}{2}\pi\right)$ で接し，どちらも原点を通る．また，$0<x<\frac{3}{2}\pi$ においては，$\sin x>-1$ であるから $f(x)=x\sin x>-x$ である．従って，求める図形の面積を S とすると，

$$S=\int_0^{\frac{3}{2}\pi}(x\sin x-(-x))\,dx=\int_0^{\frac{3}{2}\pi}x\sin x\,dx+\int_0^{\frac{3}{2}\pi}x\,dx.$$

ここで，部分積分を用いて，

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi}x\sin x\,dx=\int_0^{\frac{3}{2}\pi}x(-\cos x)'dx=\Big[-x\cos x\Big]_0^{\frac{3}{2}\pi}+\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\cos x\,dx$$
$$=0+\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{3}{2}\pi}=-1.$$

一方，$\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}\pi}x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{3}{2}\pi}=\frac{9}{8}\pi^2$ であるから，求める面積 S は，

$$S=\frac{9}{8}\pi^2-1.$$