

2020年度 岩手大学 一般入試 前期日程

数学(農学部) 解答例

1

(1) $y = 2x^2 + 3x - 2 = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{8}$ であるから、この2次関数のグラフは直線 $x = -\frac{3}{4}$ を対称軸とする下に凸な放物線であり、従って x の値が $-\frac{3}{4}$ に近いほど関数の値は小さくなり、 x の値が $-\frac{3}{4}$ から離れるほど関数の値は大きくなる。



$2 \leq |x| \leq 3$ を満たす x の中で値が $-\frac{3}{4}$ に一番近いのは $x = -2$ のときで、一番遠いのは $x = 3$ のときであるから、求める最小値は $2 \cdot (-2)^2 + 3 \cdot (-2) - 2 = 0$ 、求める最大値は $2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 - 2 = 25$ である。

$$(2) \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{3 \cdot 2 + 7 \cdot (-5)}{\sqrt{3^2 + 7^2} \sqrt{2^2 + (-5)^2}} = \frac{-29}{\sqrt{58} \sqrt{29}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ここで、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ であるから、求める角は $\theta = 135^\circ$ 。

(3) $155 = n^2 - m^2 = (n - m)(n + m)$ 。ここで、 m, n は自然数だから、 $(n - m)$ と $(n + m)$ は 155 の正の約数であり、また、 $n - m < n + m$ であるから、 $(n - m)^2 < (n - m)(n + m) = 155$ 、よって $(n - m) < \sqrt{155} < 13$ 。一方、 $155 = 5 \cdot 31$ で、5 と 31 は素数であるから、155 の正の約数で 13 より小さいものは 1 と 5 だけである。以上より、

$$\begin{cases} n - m = 1, \\ n + m = 155, \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} n - m = 5, \\ n + m = 31. \end{cases}$$

前者を解くと、 $m = 77, n = 78$ 、後者を解くと、 $m = 13, n = 18$ 。

2

(1) 100円硬貨5枚, 50円硬貨3枚を投げ, 表が出た硬貨の合計金額が400円ということは, 「100円硬貨が4枚表, 他の4枚は裏」となるか, 「100円硬貨3枚と50円硬貨2枚が表, 他の3枚は裏」となるかのいずれかの場合であり, 前者の確率は ${}_5C_4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8$, 後者の確率は ${}_5C_3 \cdot {}_3C_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8$ であるから, 求める確率は,

$${}_5C_4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 + {}_5C_3 \cdot {}_3C_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = (5 + 10 \cdot 3) \frac{1}{2^8} = \frac{35}{256}.$$

(2) 投げた8枚の硬貨がすべて表になると, 表が出た硬貨の合計金額は650円で, そうなる確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^8$: 次に, 表が出た硬貨の合計金額が600円になる場合は, 50円硬貨が1枚だけ裏になる場合で, そうなる確率は ${}_3C_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8$. 従って, 表が出た硬貨の合計金額が600円以上となる確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^8 + {}_3C_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = (1 + 3) \frac{1}{2^8} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}.$$

「表が出た硬貨の合計金額が600円未満」という事象は, 「表が出た硬貨の合計金額が600円以上」という事象の余事象だから, 求める確率は,

$$1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}.$$

(3) 表が出た硬貨の合計金額が400円となる確率を p_1 とすると, (1)で求めたように, $p_1 = \frac{35}{256}$. 一方, 「表が出た硬貨の合計金額が400円」かつ「表が出た50円硬貨が少なくとも1枚ある」ということは, 「100円硬貨3枚と50円硬貨2枚が表, 他の3枚は裏」ということであるから, そうなる確率を p_2 とすると, (1)で計算した通り,

$$p_2 = {}_5C_3 \cdot {}_3C_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{5 \cdot 3}{2^7} = \frac{15}{128}.$$

よって, 求める条件付き確率は,

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{15}{128} \cdot \frac{256}{35} = \frac{6}{7}.$$

3

(1) 与えられた漸化式に $n = 1, 2, 3$ を順に代入して,

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{4a_1 - 28}{3} = \frac{4 \cdot 31 - 28}{3} = \frac{96}{3} = 32, \\ a_3 &= \frac{5a_2 - 28}{4} = \frac{5 \cdot 32 - 28}{4} = \frac{132}{4} = 33, \\ a_4 &= \frac{6a_3 - 28}{5} = \frac{6 \cdot 33 - 28}{5} = \frac{170}{5} = 34. \end{aligned}$$

(2) $a_1 = 31, a_2 = 32, a_3 = 33, a_4 = 34$ であることから, すべての自然数 n に対し,

$$a_n = n + 30 \quad \cdots \textcircled{1}$$

であると推測できるので, これを数学的帰納法で証明する.

[I] まず, $a_1 = 31 = 1 + 30$ であるから, $\textcircled{1}$ は $n = 1$ のとき成立する.

[II] 次に, k を自然数とし, $\textcircled{1}$ が $n = k$ のときに成立すると仮定すると, $a_k = k + 30$ であり, 漸化式により,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{(k+3)a_k - 28}{k+2} = \frac{(k+3)(k+30) - 28}{k+2} \\ &= \frac{k^2 + 33k + 62}{k+2} = \frac{(k+2)(k+31)}{k+2} = k + 31 = (k+1) + 30 \end{aligned}$$

となり, $\textcircled{1}$ は $n = k + 1$ に対しても成立する.

[I], [II] により, $\textcircled{1}$ がすべての自然数 n に対して成立することが証明された.

(3) 数列 $\{a_n\}$ は等差数列で, $a_1 = 31, a_{40} = 40 + 30 = 70$ であるから, 等差数列の和の公式により,

$$\sum_{n=1}^{40} a_n = \frac{1}{2} \cdot 40(a_1 + a_{40}) = 20(31 + 70) = 20 \cdot 101 = 2020.$$

4

(1) $y = x^3 - x$ を x で微分すると, $y' = 3x^2 - 1$.

x 座標が a の点における曲線 C の接線が l だから, l の傾きは $(3a^2 - 1)$ である. さらに, l は点 $(a, a^3 - a)$ を通るから, 求める l の方程式は,

$$y = (3a^2 - 1)(x - a) + a^3 - a, \text{ 整理して, } y = (3a^2 - 1)x - 2a^3.$$

(2) 求める交点の x 座標は,

$$x^3 - x = (3a^2 - 1)x - 2a^3 \quad \text{かつ} \quad x \neq a$$

を満たす x の値である. その 3 次方程式は $x = a$ を解にもつことに注意して, 整理, 因数分解すると, $0 = x^3 - 3a^2x + 2a^3 = (x - a)^2(x + 2a)$, これを解けば $x = a, -2a$ を得る.

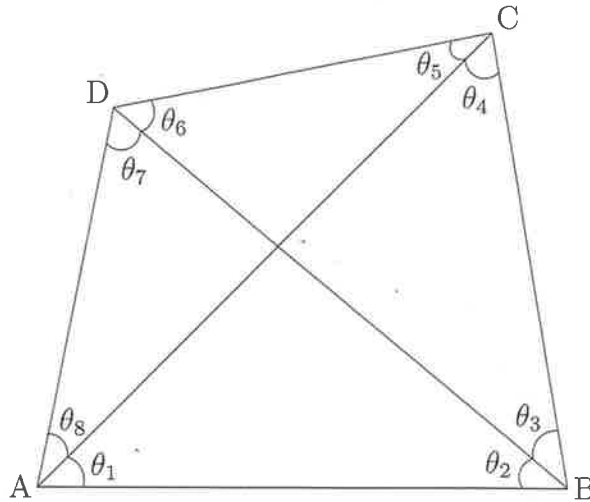
a は正だから $-2a \neq a$ であり, 求める交点の x 座標は $-2a$ である.

(3) (2) の結果から, 曲線 C と接線 l は $x = a$ において接し, $x = -2a$ において交わることがわかった. a は正だから, $-2a < a$ であり, $-2a < x < a$ の範囲の x に対しては, $(x^3 - x) - ((3a^2 - 1)x - 2a^3) = (x - a)^2(x + 2a) > 0$ である. 従って, 曲線 C と接線 l で囲まれた図形の面積は,

$$\begin{aligned} & \int_{-2a}^a \{(x^3 - x) - ((3a^2 - 1)x - 2a^3)\} dx \\ &= \int_{-2a}^a (x^3 - 3a^2x + 2a^3) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}a^2x^2 + 2a^3x \right]_{-2a}^a \\ &= \frac{1}{4}(a^4 - (-2a)^4) - \frac{3}{2}a^2(a^2 - (-2a)^2) + 2a^3(a - (-2a)) \\ &= a^4 \left(-\frac{15}{4} + \frac{9}{2} + 6 \right) = \frac{27}{4}a^4. \end{aligned}$$

この面積が 108 であるから, $\frac{27}{4}a^4 = 108$, ゆえに $a^4 = 108 \cdot \frac{4}{27} = 16$. これと a が正であることから, $a = 2$.

5



(1) $\triangle ABC$ において正弦定理により, $\frac{AB}{\sin \theta_4} = \frac{BC}{\sin \theta_1}$. ゆえに

$$\frac{BC}{AB} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_4} \dots \textcircled{1}$$

(2) (1) と同様に, $\triangle BCD$ において正弦定理により, $\frac{BC}{\sin \theta_6} = \frac{CD}{\sin \theta_3}$. ゆえに

$$\frac{CD}{BC} = \frac{\sin \theta_3}{\sin \theta_6} \dots \textcircled{2}$$

さらに, $\triangle ACD$ および $\triangle ABD$ においてそれぞれ正弦定理を用いて,

$$\frac{CD}{\sin \theta_8} = \frac{DA}{\sin \theta_5}, \quad \frac{DA}{\sin \theta_2} = \frac{AB}{\sin \theta_7}$$

従って,

$$\frac{DA}{CD} = \frac{\sin \theta_5}{\sin \theta_8}, \dots \textcircled{3} \quad \frac{AB}{DA} = \frac{\sin \theta_7}{\sin \theta_2}, \dots \textcircled{4}$$

①, ②, ③, ④ を辺々掛け合わせると,

$$\frac{BC}{AB} \cdot \frac{CD}{BC} \cdot \frac{DA}{CD} \cdot \frac{AB}{DA} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_4} \cdot \frac{\sin \theta_3}{\sin \theta_6} \cdot \frac{\sin \theta_5}{\sin \theta_8} \cdot \frac{\sin \theta_7}{\sin \theta_2}$$

最後の式の左辺は 1 だから,

$$\sin \theta_1 \sin \theta_3 \sin \theta_5 \sin \theta_7 = \sin \theta_2 \sin \theta_4 \sin \theta_6 \sin \theta_8$$

が成立することが示された。