数　学（教育学部）解　答　例

$\boxed{1}$

(1) $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ であるから，

$$\sin 2x = \cos x \iff (2\sin x - 1)\cos x = 0 \iff \sin x = \frac{1}{2} \text{ または } \cos x = 0.$$

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲で $\sin x = \dfrac{1}{2}$ となる x は $\dfrac{\pi}{6}$ と $\dfrac{5}{6}\pi$，$\cos x = 0$ となる x は $\dfrac{\pi}{2}$ と $\dfrac{3}{2}\pi$ であるから，求める x は，$x = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5}{6}\pi, \dfrac{3}{2}\pi$.

(2) 線分 BC の長さは，点 B と直線 l の距離であるから，

$$\mathrm{BC} = \frac{|5\sqrt{3}\cdot 35 - 7\cdot 25\sqrt{3} - 12|}{\sqrt{(5\sqrt{3})^2 + 7^2}} = \frac{12}{\sqrt{75+49}} = \frac{12}{\sqrt{124}} = \frac{6}{\sqrt{31}}.$$

線分 BD の長さは，点 B と直線 m の距離であるから，

$$\mathrm{BD} = \frac{|7\cdot 35 + 5\sqrt{3}\cdot 25\sqrt{3} + 53|}{\sqrt{7^2 + (5\sqrt{3})^2}} = \frac{245+375+53}{2\sqrt{31}} = \frac{673}{2\sqrt{31}}.$$

よって，求める長方形 ACBD の面積は，$\mathrm{BC}\cdot\mathrm{BD} = \dfrac{6}{\sqrt{31}}\cdot\dfrac{673}{2\sqrt{31}} = \dfrac{2019}{31}$.

(3) $$S_n = \sum_{k=1}^{n}(3k^2 - 2k) = 3\sum_{k=1}^{n}k^2 - 2\sum_{k=1}^{n}k$$

$$= 3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 2\cdot\frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n(n+1)(2n-1).$$

従って S_n が 32 の倍数ということは $n(n+1)(2n-1)$ が $64 = 2^6$ の倍数ということだが，$(2n-1)$ は常に奇数で，n と $(n+1)$ のうちの一方も奇数であるから，S_n が 32 の倍数となるためには n と $(n+1)$ のどちらかが 64 の倍数となることが必要かつ十分な条件である．そうなる自然数 n のうち最小なのは，$n+1 = 64$ のときだから，求める n の値は，$n = 63$.

$\boxed{2}$

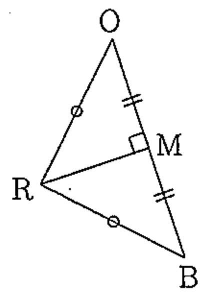
(1) 与えられた条件から $\overrightarrow{OP}=t\vec{a}$, $\overrightarrow{OQ}=(1-t)\vec{b}+t\vec{c}$ であり，
点 R は線分 PQ を 1 : 2 に内分するから，

$$\overrightarrow{OR}=\frac{1}{3}(2\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ})=\frac{2}{3}t\vec{a}+\frac{1}{3}(1-t)\vec{b}+\frac{1}{3}t\vec{c}.$$

(2) $|\overrightarrow{OR}|^2=|\overrightarrow{BR}|^2=|\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{OR}|^2-2\overrightarrow{OR}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$ より，
$\overrightarrow{OR}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}|\vec{b}|^2=\frac{1}{2}$ である．これに (1) の結果を代入して，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}&=\overrightarrow{OR}\cdot\vec{b}=\left(\frac{2}{3}t\vec{a}+\frac{1}{3}(1-t)\vec{b}+\frac{1}{3}t\vec{c}\right)\cdot\vec{b}\\&=\frac{2}{3}t\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{3}(1-t)|\vec{b}|^2+\frac{1}{3}t\vec{c}\cdot\vec{b}\\&=\frac{2}{3}t+\frac{1}{3}(1-t)+\frac{1}{3}t=\frac{2}{3}t+\frac{1}{3}.\end{aligned}$$ これを解いて，$t=\frac{1}{4}$.

(3) OR=BR であるから，線分 OB の中点を M とすると RM⊥OB であり，また，



$$\overrightarrow{RM}=\overrightarrow{RO}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OR}+\frac{1}{2}\vec{b}.$$

従って，(1), (2) の結果から，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{RM}&=-\left(\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{12}\vec{c}\right)+\frac{1}{2}\vec{b}\\&=\frac{1}{12}(-2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}).\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}|-2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}|^2&=4|\vec{a}|^2+9|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}-6\vec{b}\cdot\vec{c}+4\vec{c}\cdot\vec{a}\\&=4\cdot4+9+9-12-6+4=20\end{aligned}$$

であるから，$|\overrightarrow{RM}|=\frac{1}{12}\sqrt{20}=\frac{\sqrt{5}}{6}$. よって，求める三角形 OBR の面積は，

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{RM}|\cdot|\vec{b}|=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{6}\cdot1=\frac{\sqrt{5}}{12}.$$

$\boxed{3}$

(1) サイコロA，Bの出る目の組み合わせは$6 \times 8 = 48$通りあり，そのどれも等しい確率で起こるが，そのうち2つの目が一致する場合は6通りだから，求める確率は$\dfrac{6}{48} = \dfrac{1}{8}$.

(2) 1以上8以下の自然数のうち3で割り切れるのは3と6の2つだけだから，サイコロBの出た目が3の倍数でない確率は$\dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$.

1以上20以下の自然数のうち3で割り切れるものは6個あるから，サイコロCの出た目が3の倍数でない確率は$\dfrac{14}{20} = \dfrac{7}{10}$.

従ってサイコロB，Cの出た目の積が3の倍数でない確率は，$\dfrac{3}{4} \times \dfrac{7}{10} = \dfrac{21}{40}$.
その余事象の確率が，サイコロB，Cの出た目の積が3の倍数となる確率だから，求める確率は$1 - \dfrac{21}{40} = \dfrac{19}{40}$. 」

(3) サイコロAの出た目が3以上である確率は$\dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$，サイコロBの出た目が3以上である確率は$\dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$，サイコロCの出た目が3以上である確率は$\dfrac{18}{20} = \dfrac{9}{10}$であるから，A，B，Cの目がすべて3以上である確率は，

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{9}{10} = \frac{9}{20}.$$

(4) サイコロAの出た目が4以上である確率は$\dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$，サイコロBの出た目が4以上である確率は$\dfrac{5}{8}$，サイコロCの出た目が4以上である確率は$\dfrac{17}{20}$であるから，A，B，Cの目がすべて4以上である確率は，$\dfrac{1}{2} \times \dfrac{5}{8} \times \dfrac{17}{20} = \dfrac{17}{64}$.

A，B，Cの3つの出た目の最小値が3ということは，「すべての目が3以上」であり，かつ「すべての目が4以上」ではない，ということだから，(3)の結果と合わせて，求める確率は，

$$\frac{9}{20} - \frac{17}{64} = \frac{59}{320}.$$

$\boxed{4}$

(1) $f(x)=-4x^3+3x+1$ とおくと，$f'(x)=-12x^2+3=-3(2x-1)(2x+1)$.

$f(-1)=2$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=2$, $f(2)=-25$ であるから，

区間 $-1\leqq x\leqq 2$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる．

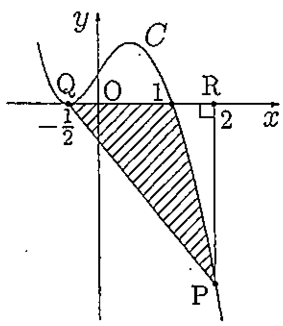
x	-1	$\cdots\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	2	↘	0	↗	2	↘	-25

よって，区間 $-1\leqq x\leqq 2$ における $f(x)$ の最大値は2，最小値は -25.

(2) 上の増減表から，曲線 C と x 軸の接点Q の x 座標は $-\frac{1}{2}$ である．

また，$f(x)=-(2x+1)^2(x-1)$ であるから，曲線 C は点 $(1,0)$ で x 軸と交わる．

以上のことから，曲線 C の概形は右図の曲線のようになる．右図の斜線部分の図形の面積が求めるものである．



点Pから x 軸におろした垂線の足をRとすると，点Rの座標は $(2,0)$ である．

直角三角形PRQの面積を S_1 とすると，$S_1=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{PR}\cdot\mathrm{QR}=\frac{1}{2}\cdot 25\cdot\frac{5}{2}=\frac{125}{4}$.

また，曲線 C の $1\leqq x\leqq 2$ の部分と x 軸および線分PRで囲まれた図形の面積を S_2 とすると，

$$S_2=\int_1^2\bigl(-f(x)\bigr)\,dx=\int_1^2(4x^3-3x-1)\,dx$$
$$=\left[x^4-\frac{3}{2}x^2-x\right]_1^2=(2^4-1^4)-\frac{3}{2}(2^2-1^2)-(2-1)=\frac{19}{2}.$$

よって，求める図形の面積は，$S_1-S_2=\frac{125}{4}-\frac{19}{2}=\frac{87}{4}$.

$\boxed{5}$

(1) $f(x)=x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}}$ だから，$f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{6}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2\sqrt{x}}\left(x-\frac{1}{9}\right)$.

従って，$0<x<\frac{1}{9}$ においては，$f'(x)<0$ であるから $f(x)$ は減少し，

$x>\frac{1}{9}$ においては，$f'(x)>0$ であるから $f(x)$ は増加する．

ゆえに $f(x)$ は $x=\frac{1}{9}$ において最小となり，求める最小値は

$$f\left(\frac{1}{9}\right)=\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{3}\right)\sqrt{\frac{1}{9}}=-\frac{2}{27}.$$

(2) 上で計算したように，$f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{6}x^{-\frac{1}{2}}$ だから，

$$\begin{aligned}1+\{f'(x)\}^2&=1+\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{6}x^{-\frac{1}{2}}\right)^2\\&=1+\left(\frac{9}{4}x-\frac{1}{2}+\frac{1}{36}x^{-1}\right)\\&=\frac{9}{4}x+\frac{1}{2}+\frac{1}{36}x^{-1}=\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{6}x^{-\frac{1}{2}}\right)^2.\end{aligned}$$

よって，求める曲線の長さは，

$$\begin{aligned}\int_1^{16}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx&=\int_1^{16}\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{6}x^{-\frac{1}{2}}\right)dx\\&=\left[x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}}\right]_1^{16}\\&=\sqrt{16}^{\,3}-1+\frac{1}{3}(\sqrt{16}-1)\\&=4^3-1+\frac{1}{3}(4-1)=64.\end{aligned}$$