平成31年度岩手大学一般入試（前期日程） 数学（理工学部） 解答例

$\boxed{1}$ 〔解答例〕

(1) 円の方程式は $(x-0)^2+(y-2)^2=r^2$ であり，これに直線 $y=mx$ が接しているので，その接点の x 座標は

$$x^2+(mx-2)^2=r^2$$

を解くことで求められる。上式を x について整理すると

$$(1+m^2)x^2-4mx+(4-r^2)=0 \quad \cdots\cdots ①$$

となる。式①の解が重解，すなわち，2次方程式の解の判別式 D が0になればよいので，

$$D=(4m)^2-4(1+m^2)(4-r^2)=0$$

$$(4m)^2-4(4-r^2+4m^2-r^2m^2)=0$$

$$(4r^2)m^2-4(4-r^2)=0$$

$r>0$ なので

$$m^2=\frac{4-r^2}{r^2}$$

両辺の平方根をとると，$r<2$ なので

$$m=\pm\frac{\sqrt{4-r^2}}{r}$$

を得る。

(2) (ア) $x_1=\dfrac{a}{2}$,　　$x_2=b$

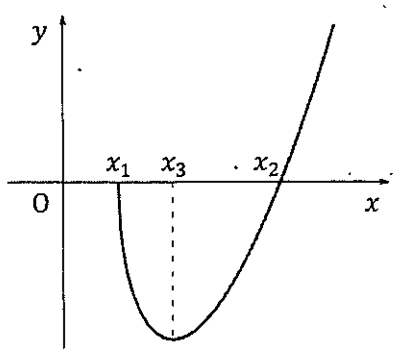
(イ) 微分すると

$$y'=\sqrt{2x-a}+(x-b)\frac{2}{2\sqrt{2x-a}}$$

$$=\sqrt{2x-a}+\frac{x-b}{\sqrt{2x-a}}$$

$$=\frac{2x-a+x-b}{\sqrt{2x-a}}$$

$$=\frac{3x-a-b}{\sqrt{2x-a}}$$



$y'=0$ となる点 x_3 は

$$x_3=\frac{a+b}{3}$$

(ウ) x_3 の式を次のように変形する。

$$x_3 = \frac{2 \cdot \dfrac{a}{2} + b}{3}$$
$$= \frac{2 \cdot x_1 + x_2}{3}$$

x_3 は x_1 と x_2 を $1:2$ に内分する点なので，x_3 は x_1 に近い。

(3) $-2 \leqq x \leqq 0$ のときは $|x| = -x$ であり，$0 \leqq x \leqq 1$ のときは $|x| = x$ であるから

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{1} (x + |x| + 2)^2 \, dx &= \int_{-2}^{0} 2^2 \, dx + \int_{0}^{1} (2x+2)^2 \, dx \\
&= \int_{-2}^{0} 4 \, dx + \int_{0}^{1} 4(x+1)^2 dx \\
&= \big[\, 4x \,\big]_{-2}^{0} + \left[\frac{4}{3}(x+1)^3 \right]_{0}^{1} \\
&= \big\{0 - \big(4 \cdot (-2)\big)\big\} + \left(\frac{4}{3} \cdot 2^3 - \frac{4}{3} \right) \\
&= \frac{52}{3}
\end{aligned}$$

(4) 等比数列は

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 4, \quad a_4 = 8, \quad \cdots, \quad a_{10} = 2^9$$

初項から第 10 項までの和は

$$S_{10} = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^9$$
$$= \frac{1 \cdot (1 - 2^{10})}{1 - 2} = 2^{10} - 1 = 1024 - 1 = 1023$$

この十進数を二進数で表すと

$1111111111_{(2)}$

$\boxed{2}$ 〔解答例〕

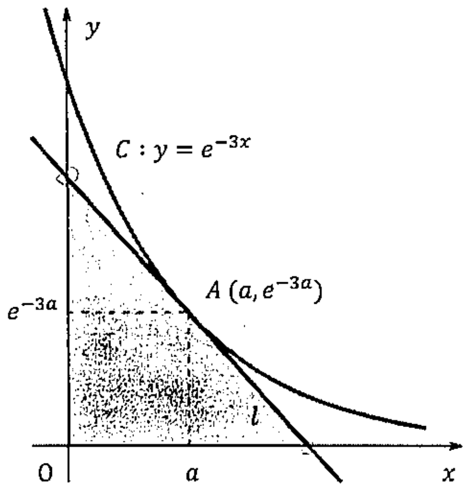
(1) $y' = -3e^{-3x}$．接線 l の方程式は $y - e^{-3a} = -3e^{-3a}(x-a)$．整理すると

$$y = -3e^{-3a}x + (3a+1)e^{-3a}$$

(2) $x=0$ のとき $y=(3a+1)e^{-3a}$．$y=0$ のとき $x=\frac{1}{3}(3a+1)$．

$$S = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot(3a+1)(3a+1)e^{-3a} = \frac{1}{6}(3a+1)^2e^{-3a}$$

(3) S の式を a で微分すると



$$\begin{aligned} S' &= \frac{1}{6}\left\{2(3a+1)3e^{-3a} + (3a+1)^2(-3)e^{-3a}\right\} \\ &= \frac{1}{6}\left\{2(3a+1)+(3a+1)^2(-1)\right\}3e^{-3a} \\ &= \frac{1}{2}(3a+1)(1-3a)e^{-3a} \end{aligned}$$

$a>0$ のとき $S'=0$ を満たす解は

$$a = \frac{1}{3}$$

であり，増減表より S はここで最大値をとる．このとき

$$S = \frac{1}{6}(3\cdot\frac{1}{3}+1)^2\frac{1}{e} = \frac{2}{3e}$$

S の最大値は $\frac{2}{3e}$ で，A の座標は $\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{e}\right)$

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
S'		$+$	0	$-$
S		↗	極大	↘

$\boxed{3}$ 〔解答例〕

(1) 半角の公式を用いると

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx &= \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx \\
&= \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi} \\
&= \left\{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\pi\right) - \left(\frac{0}{2} - \frac{1}{4}\sin 0\right)\right\} \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

(2) 部分積分を用いると

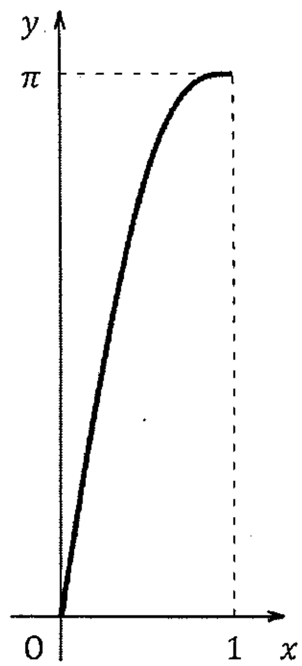
$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} x\ \sin x\, dx &= \left[x\,(-\cos x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos x)\, dx \\
&= \{(-\pi\ \cos\pi) - (-0\ \cos 0)\} + \left[\sin x\right]_0^{\pi} \\
&= \pi + \{\sin\pi - \sin 0\} \\
&= \pi
\end{aligned}
$$

(3) 関数 $y = \pi x + \sin \pi x$ を微分すると

$$y' = \pi + \pi\ \cos \pi x$$

増減表およびグラフは次のとおり。

x	0	$\cdots$	1
y'	2π	$+$	0
y	0	$\nearrow$	π



(4) 体積 V は次の積分で得られる。

$$V = \int_0^1 \pi \left(\pi x + \sin \pi x\right)^2 dx$$

置換積分法を利用する。$x = \dfrac{t}{\pi}$ とおくと $dx = \dfrac{dt}{\pi}$ であり，$\begin{array}{c|c} x & 0 \to 1 \\ \hline t & 0 \to \pi \end{array}$ であるから

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\pi} \left(t + \sin t\right)^2 dt \\ &= \int_0^{\pi} \left(t^2 + 2t\ \sin t + \sin^2 t\right) dt \\ &= \int_0^{\pi} t^2\ dt + 2\int_0^{\pi} t\ \sin t\ dt + \int_0^{\pi} \sin^2 t\ dt \end{aligned}$$

設問 (1)，(2) の答えを使うと

$$\begin{aligned} V &= \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi} + 2\pi + \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi^3}{3} + \frac{5\pi}{2} \end{aligned}$$

$\boxed{4}$ 〔解答例〕

(1) $\overrightarrow{p}=\dfrac{\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}}{2}$,　$\overrightarrow{q}=\dfrac{-\overrightarrow{b}+2\overrightarrow{c}}{2-1}=2\overrightarrow{c}-\overrightarrow{b}$

(2) $\overrightarrow{r}=\dfrac{-t\overrightarrow{a}+(1+t)\overrightarrow{p}}{1+t-t}=(1+t)\overrightarrow{p}-t\overrightarrow{a}=\dfrac{1+t}{2}(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})-t\overrightarrow{a}$

(3) 線分 QR と線分 AB が平行であるための条件は $\overrightarrow{\mathrm{QR}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, すなわち

$$\overrightarrow{r}-\overrightarrow{q}=k(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}) \quad \cdots\cdots ②$$

である。いま, $\overrightarrow{c}$ は零ベクトルなので, 式②の左辺は

$$\overrightarrow{r}-\overrightarrow{q}=\frac{1+t}{2}(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})-t\overrightarrow{a}-(2\overrightarrow{c}-\overrightarrow{b})=\frac{1+t}{2}\overrightarrow{b}-t\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\frac{3+t}{2}\overrightarrow{b}-t\overrightarrow{a}$$

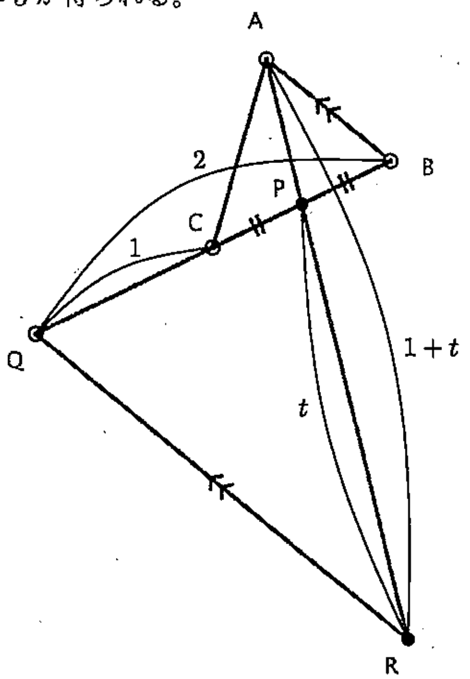
となる。これが式②の右辺に等しいので, $\dfrac{3+t}{2}\overrightarrow{b}-t\overrightarrow{a}=k(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a})$ であり, これをベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ について整理すると

$$(k-t)\overrightarrow{a}+\left(\frac{3+t}{2}-k\right)\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$$

が得られる。点 C が原点であり, 3 点 A, B, C は同一直線上にないので, $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ は平行ではない。したがって, 次式が成り立つ必要がある。

$$\begin{cases} k-t=0 \\ \dfrac{3+t}{2}-k=0 \end{cases}$$

これから k を消去して, $t=3$ が得られる。



(4) 点Pが辺BCの中点であることから，$\triangle ABP$ の面積は（$\triangle ABC$ の面積の半分なので）$\frac{1}{2}$ である。また，線分 AB と線分 QR が平行であるから, $\triangle ABP$ と $\triangle RQP$ は相似である。ここで，$|AP| : |PR| = 1 : 3$ であるから, 相似な三角形 $\triangle ABP$ と $\triangle RQP$ の面積比は $1^2 : 3^2$ である。したがって，$\triangle PQR$ の面積は（$\triangle ABP$ の面積の 9 倍となり）$\frac{9}{2}$ となる。

$\boxed{5}$ 〔解答例〕

(1) $z=\cos\dfrac{\pi}{5}+i\sin\dfrac{\pi}{5}$ なので，ド・モアブルの定理より

$$z^5=\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)^5=\left(\cos\frac{5\pi}{5}+i\sin\frac{5\pi}{5}\right)=\cos\pi+i\sin\pi=-1$$

同様に，

$$z^{10}=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$$

(2) 設問 (1) の結果より，

$$z^{10}-1=0$$

左辺を因数分解すると

$$(z-1)(z^9+z^8+\cdots+z^2+z+1)=0$$

ここで，$z=\cos\dfrac{\pi}{5}+i\sin\dfrac{\pi}{5}\neq 1$ であるから $z-1\neq 0$．よって，

$$1+z+z^2+\cdots+z^8+z^9=0$$

(3) 設問 (1) の結果より，

$$z^5+1=0$$

左辺を因数分解すると

$$(z+1)(z^4-z^3+z^2-z+1)=0$$

ここで，$z\neq -1$ より $z+1\neq 0$ であり，ゆえに $z^4-z^3+z^2-z+1=0$．したがって，

$$z^4-z^3+z^2-z=-1$$